

Padrões Globais

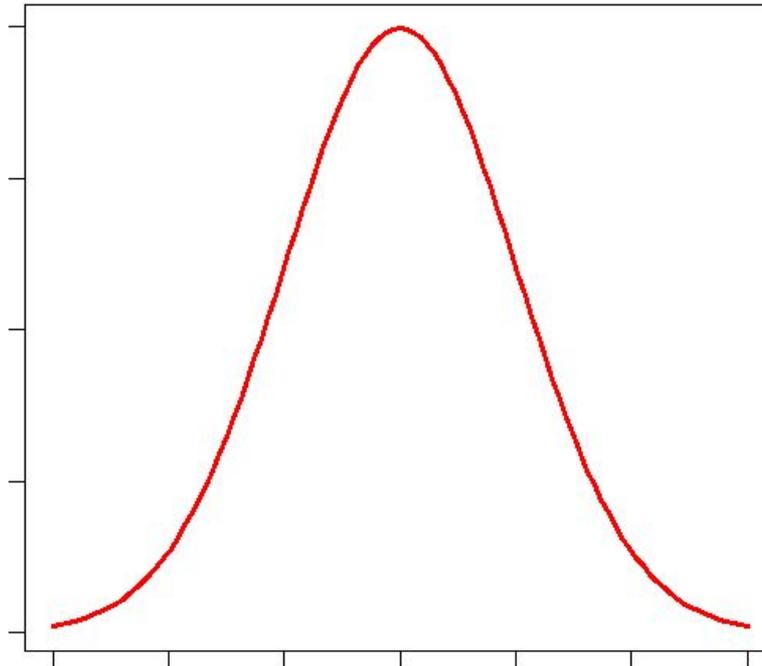


Distribuição dos Parâmetros da Rede

Prof. Fabrício Olivetti de França

Distribuição de Dados

Ao realizar medições de diversas naturezas, observamos uma distribuição normal (Gaussiana, curva-sino) dos valores mensurados.



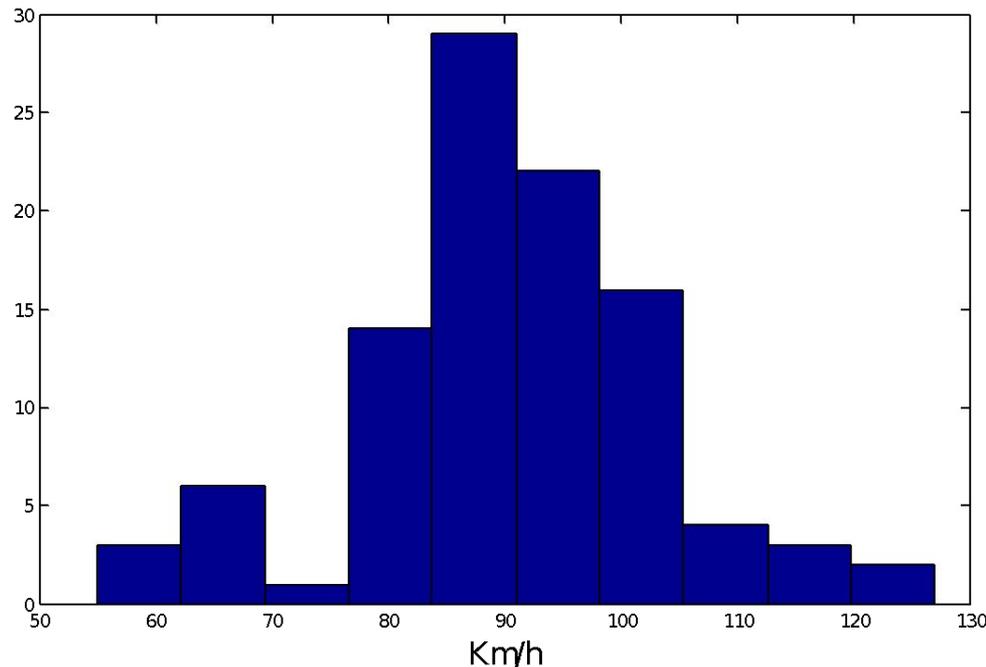
Distribuição de Dados

Altura dos goleiros do campeonato brasileiro: a maioria dos goleiros tem uma altura em torno de 1,88 a 1,91 metros. Porém temos uma minoria em torno de 1,82m e outra minoria em torno de 1,97m (extremos)



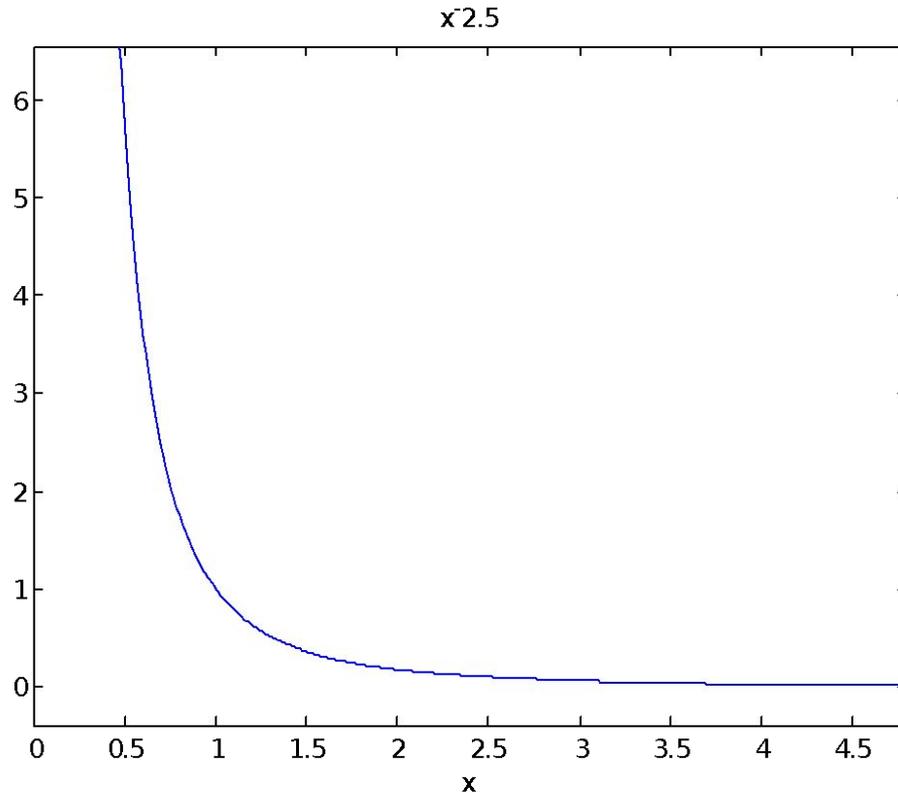
Distribuição de Dados

Velocidade média de carros em rodovias: em rodovias como a Imigrantes, por exemplo, a velocidade média da maioria dos carros fica em torno de 80Km/h e 100Km/h, tendo uma minoria em torno de 50Km/h e outra minoria em torno de 120Km/h



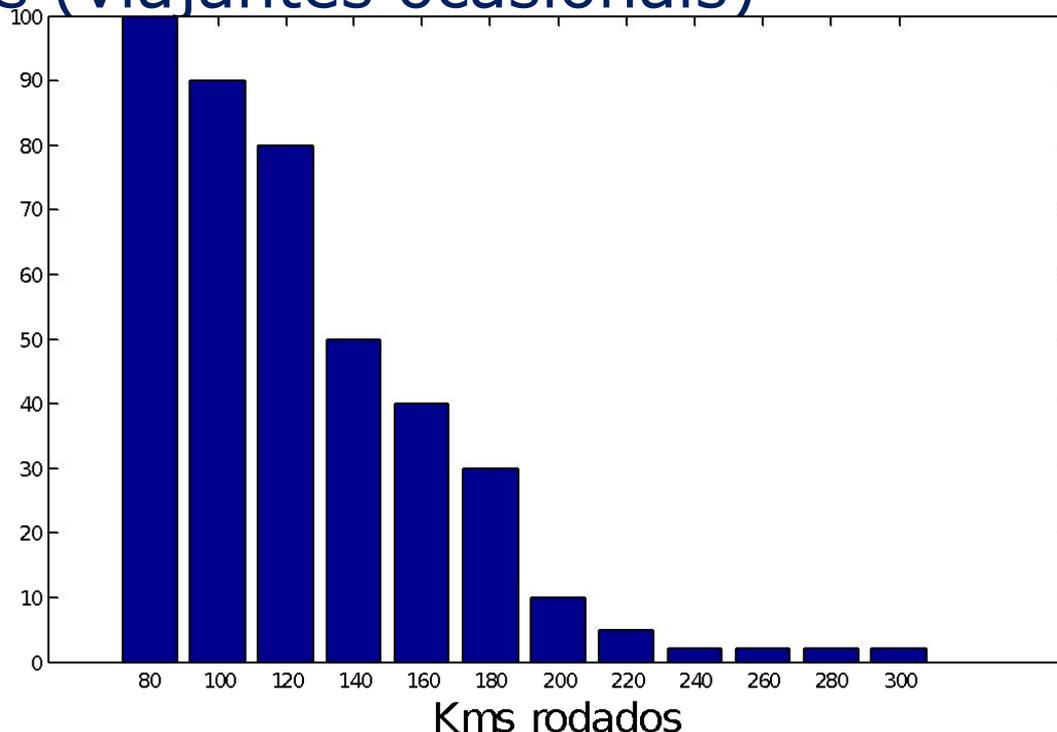
Distribuição de Dados

Porém, muitas observações possuem uma distribuição diferente, seguindo uma função de potência:



Distribuição de Dados

Levando em conta a rodovia bandeirantes e o sistema anchieta-imigrantes, a maioria dos carros percorrem cerca de 100Km (Santos - SP), enquanto uma minoria percorre trechos muito maiores (viajantes ocasionais)



Medidas de Distribuição

Esse tipo de distribuição foi observada pelo economista italiano Vilfredo Pareto quando estudava a distribuição da riqueza na Itália. Ele percebeu que:

- ❑ Grande parte das terras pertenciam a minoria da população;
- ❑ Boa parte do lucro de uma empresa chegava no bolso de pouquíssimos funcionários.



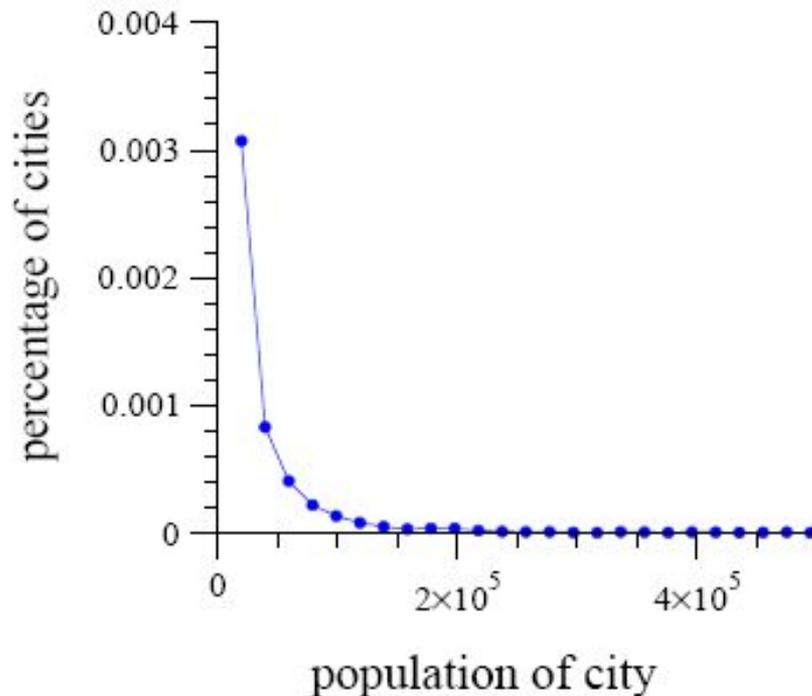
Distribuição de Pareto

Essa distribuição foi observada em outras situações, como:

- ❑ Poucas cidades concentram maior parte da população
- ❑ Maior parte dos crimes são cometidos pela menor parte dos criminosos
- ❑ Uma minoria das palavras de um idioma aparecem com uma frequência muito acima da maioria das palavras

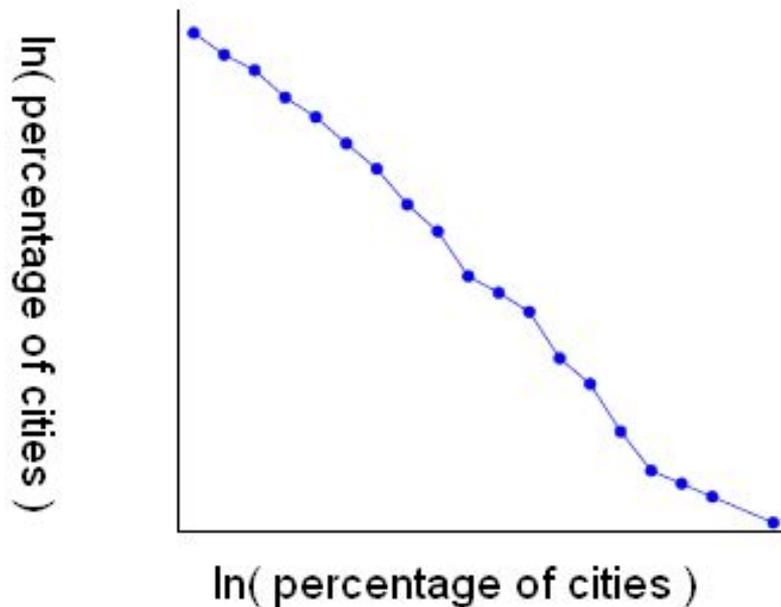
Distribuição de Pareto

Vejam, por exemplo, a distribuição de cidades de acordo com o tamanho de sua população:



Distribuição de Pareto

Plotando esse mesmo gráfico em escala logarítmica ($\log(x)$ x $\log(f(x))$), temos que a distribuição se torna aproximadamente linear:



Another histogram of the same data, but plotted on logarithmic scales.

Lei da Potência

Esse modelo linear pode ser descrito como:

$$\log(y) = -\alpha \log(x) + b$$

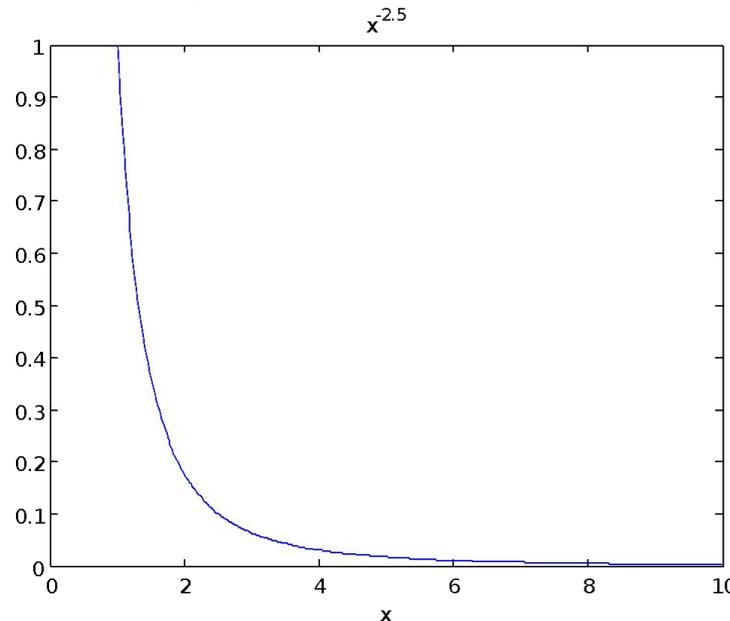
Aplicando a função exponencial nos dois lados teremos:

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \exp(-\alpha \cdot \log(x) + b) = \exp(\log(x^{-\alpha}) + b) \\ &= \exp(\log(x^{-\alpha})) * \exp(b) = x^{-\alpha} * c \end{aligned}$$

$$f(x) = c * x^{-\alpha}$$

Lei da Potência

O tipo de distribuição regida pela função $f(x) = cx^{-\alpha}$ é chamada **distribuição de lei de potência**.



Essa distribuição implica que pequenas ocorrências são extremamente comuns, enquanto grandes quantidades são raras

Lei da Potência

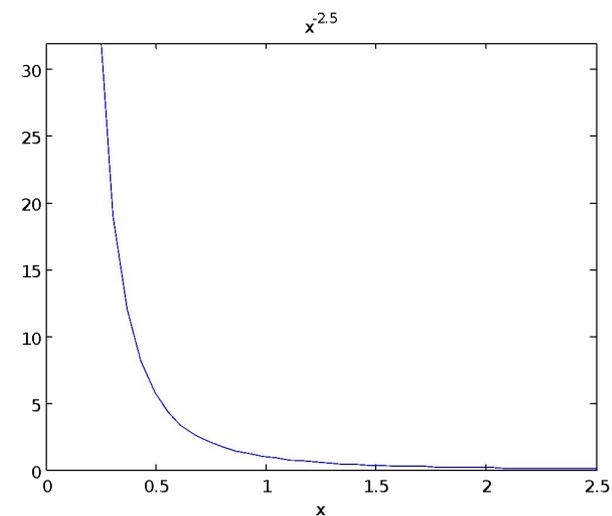
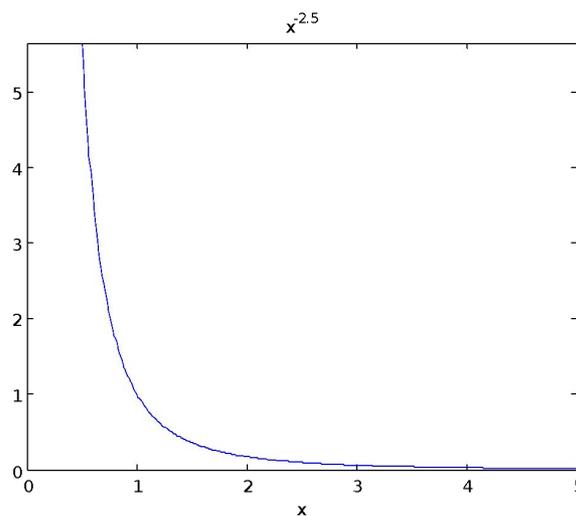
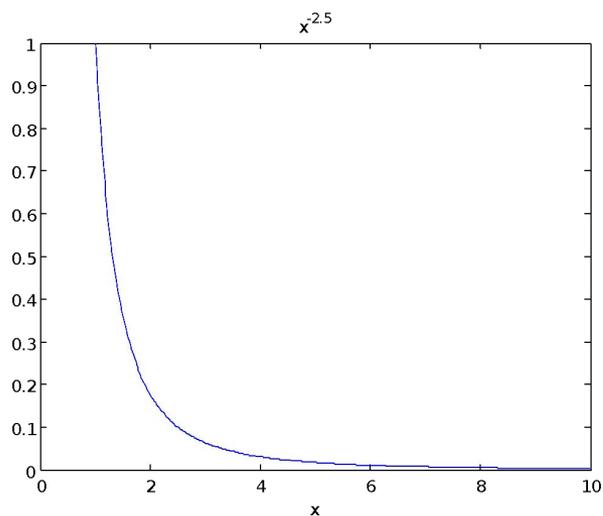
Outra característica da Lei da Potência é que ela é invariante em escala.

Se pegarmos uma amostra da nossa distribuição ela terá o mesmo formato da distribuição completa.

Multiplicar a variável da função de potência simplesmente aumenta ou reduz o valor da função em um fator constante.

Lei da Potência

Vamos ver a função $f(x) = x^{-2.5}$ em diferentes escalas.



Quando reduzimos o eixo x em uma taxa t , escalamos o eixo y em $t^{-2.5}$.

Invariância em Escala

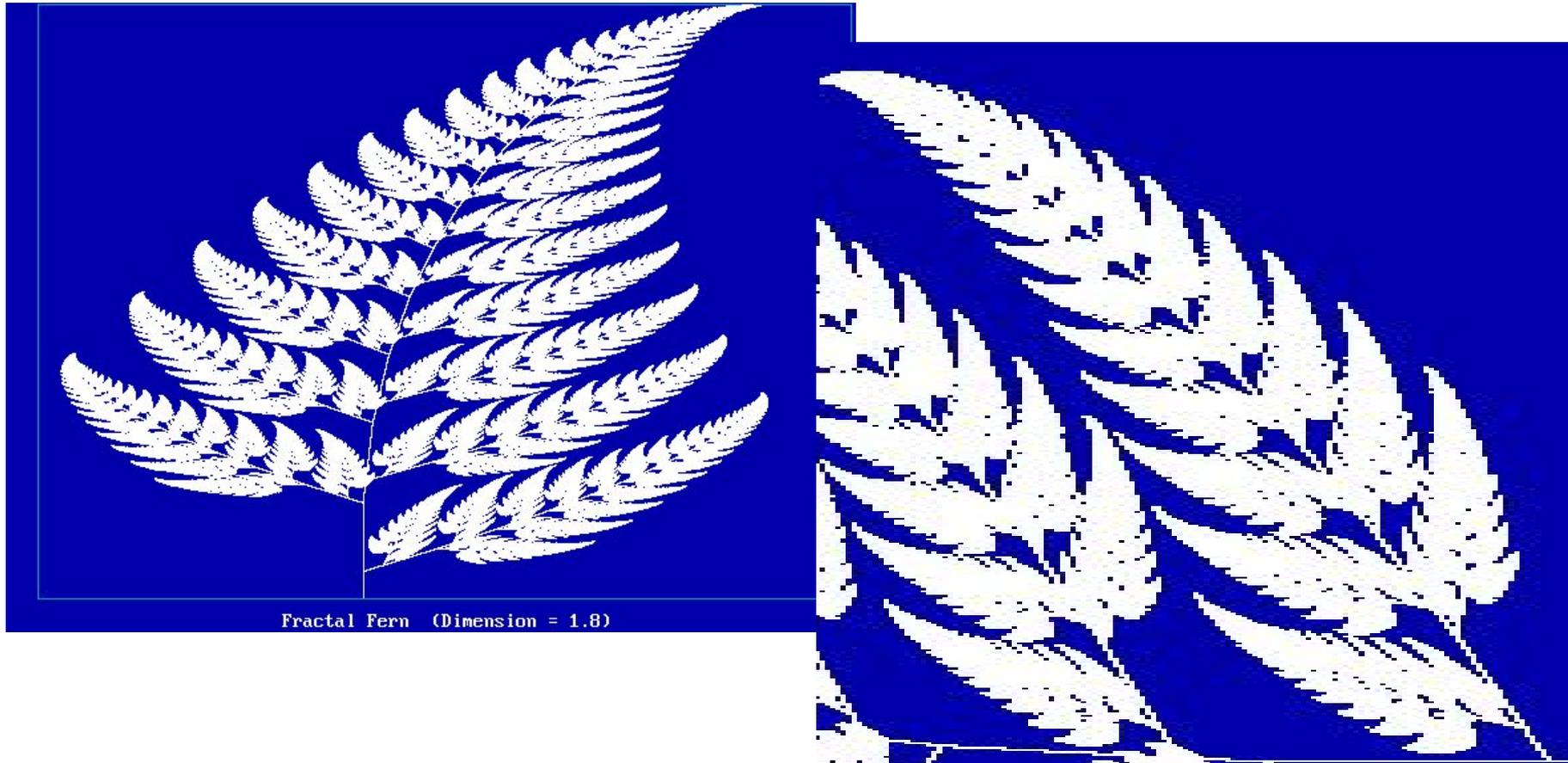
-

Dada a relação $f(x) = a \cdot x^k$, escalonando o argumento x por um fator constante causa apenas um escalonamento proporcional da própria função. Isto é:

$$f(cx) = a(cx)^k = c^k f(x) \propto f(x)$$

Um exemplo de invariância à escala são os fractais.

Invariância à Escala (Fractais)



Invariância à Escala (Fractais)



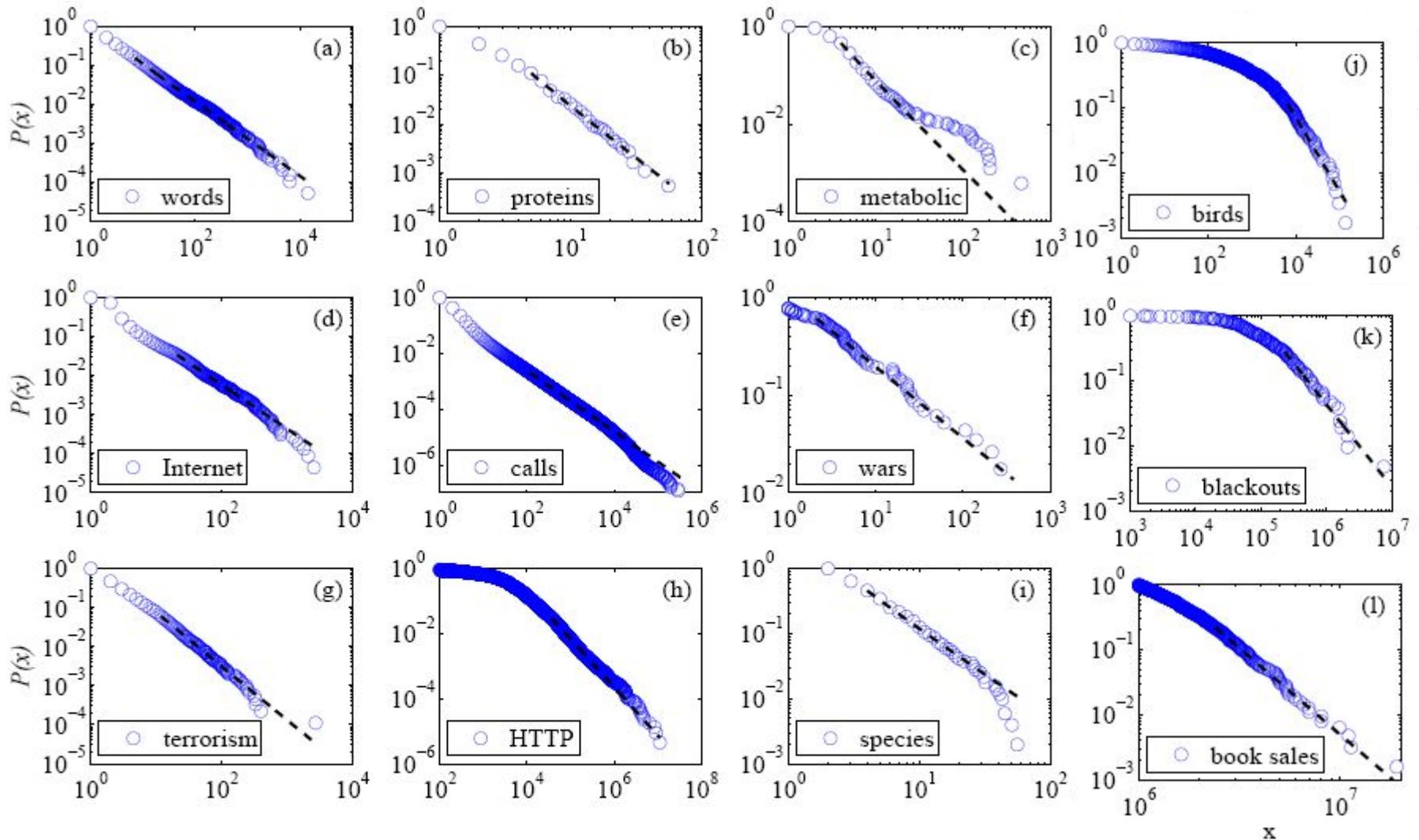
Lei de Potência em Redes

Lei da Potência em Redes

A distribuição de Pareto e a lei de potência em redes é geralmente verificada através de dados estatísticos das propriedades dos nós e da rede.

Grau: verifica-se a função de frequência $f(k)$ de nós com grau k .

Lei de Potência do Grau dos Nós



Invariância em Rede

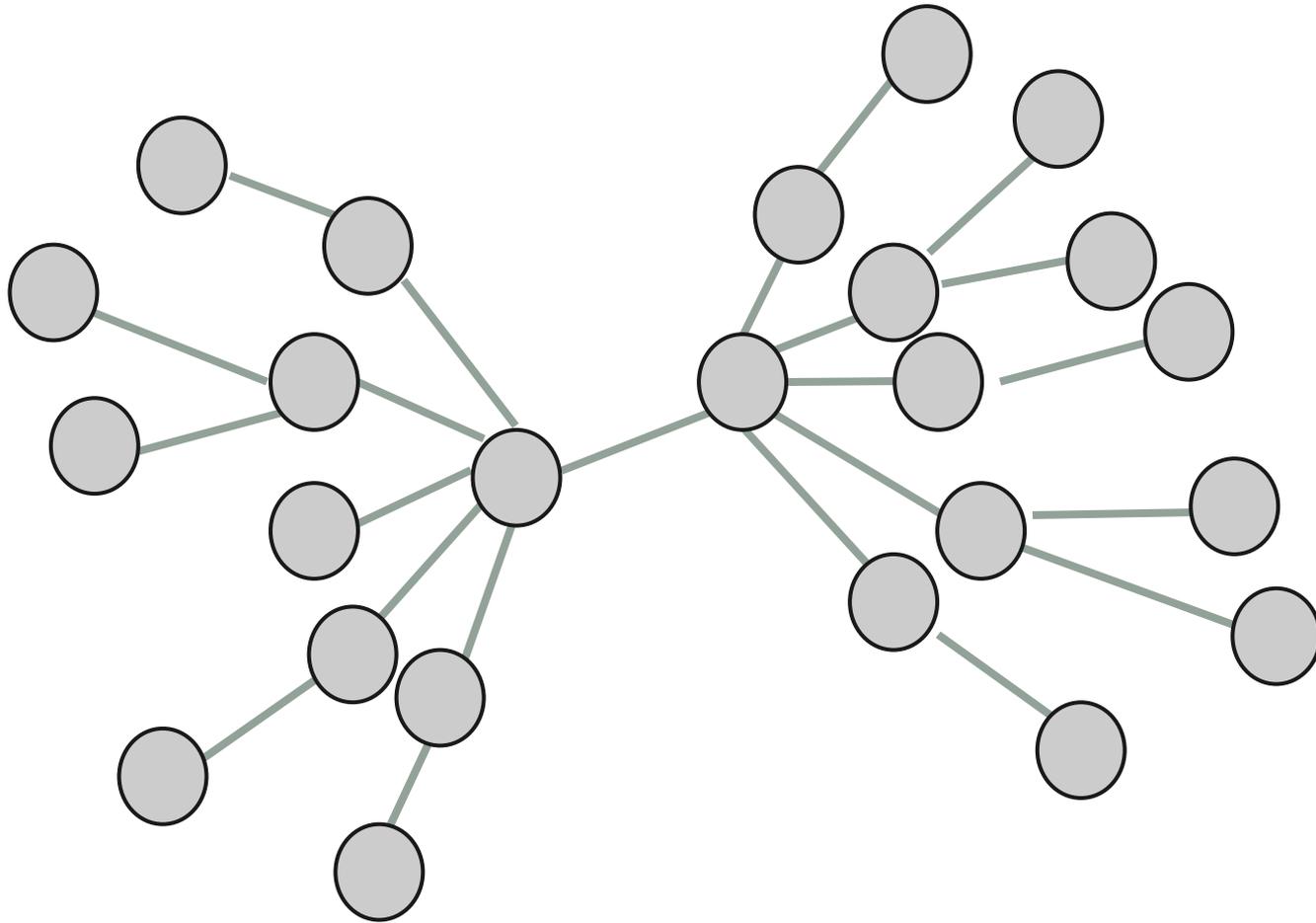
-

A invariância da rede vem do fato que a proporção dos nós com grau $2k$ e dos nós com grau k é uma constante, para qualquer k :

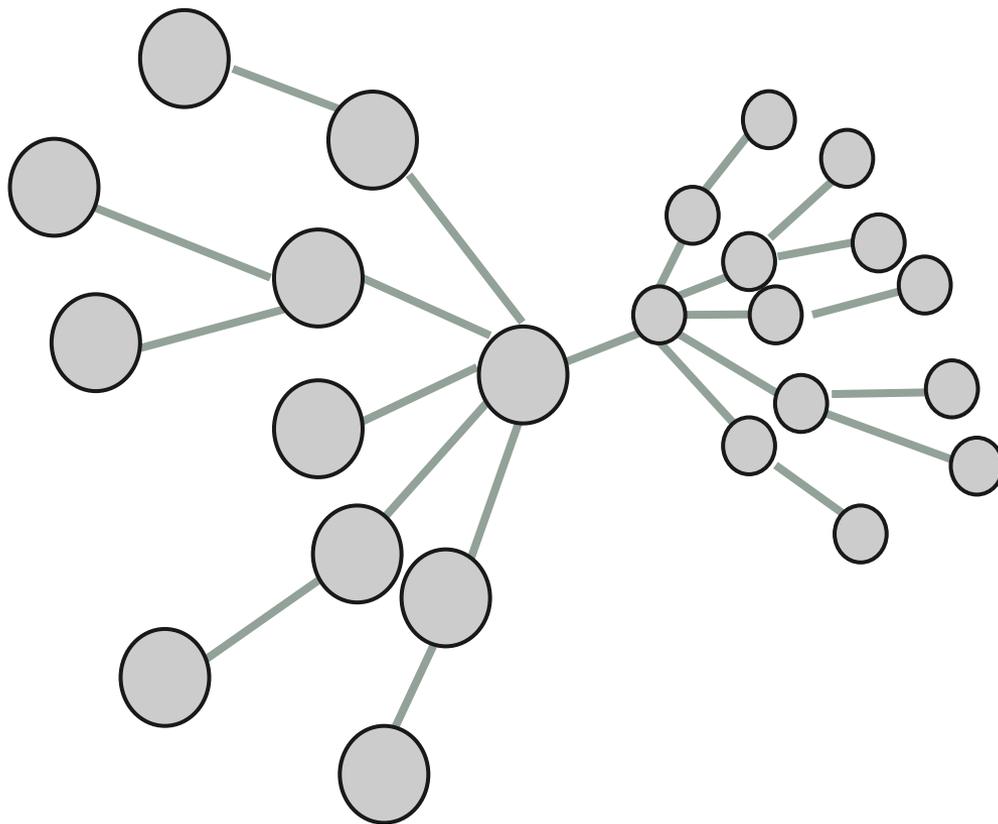
$$\frac{f(2k)}{f(k)} = \frac{C \cdot (2k)^{-\alpha}}{C \cdot k^{-\alpha}} = 2^{-\alpha}$$

Dessa forma não há distinção da estrutura global e local da rede.

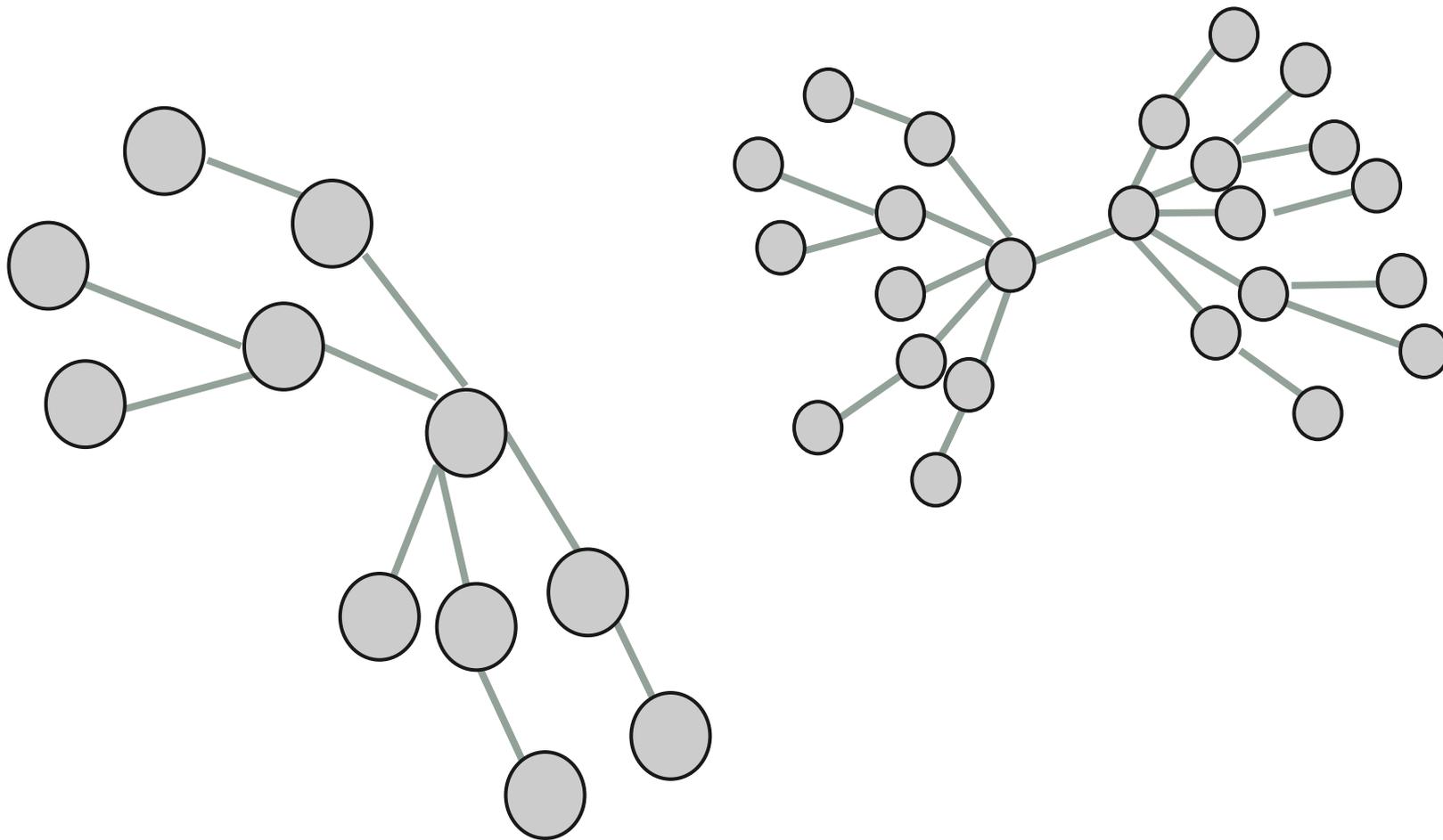
Invariância em Rede



Invariância em Rede



Invariância em Rede



Redes Sem Escala

Propriedade:

A distância média entre os nós cresce de forma logarítmica em função do tamanho da rede ($\log(N)$).

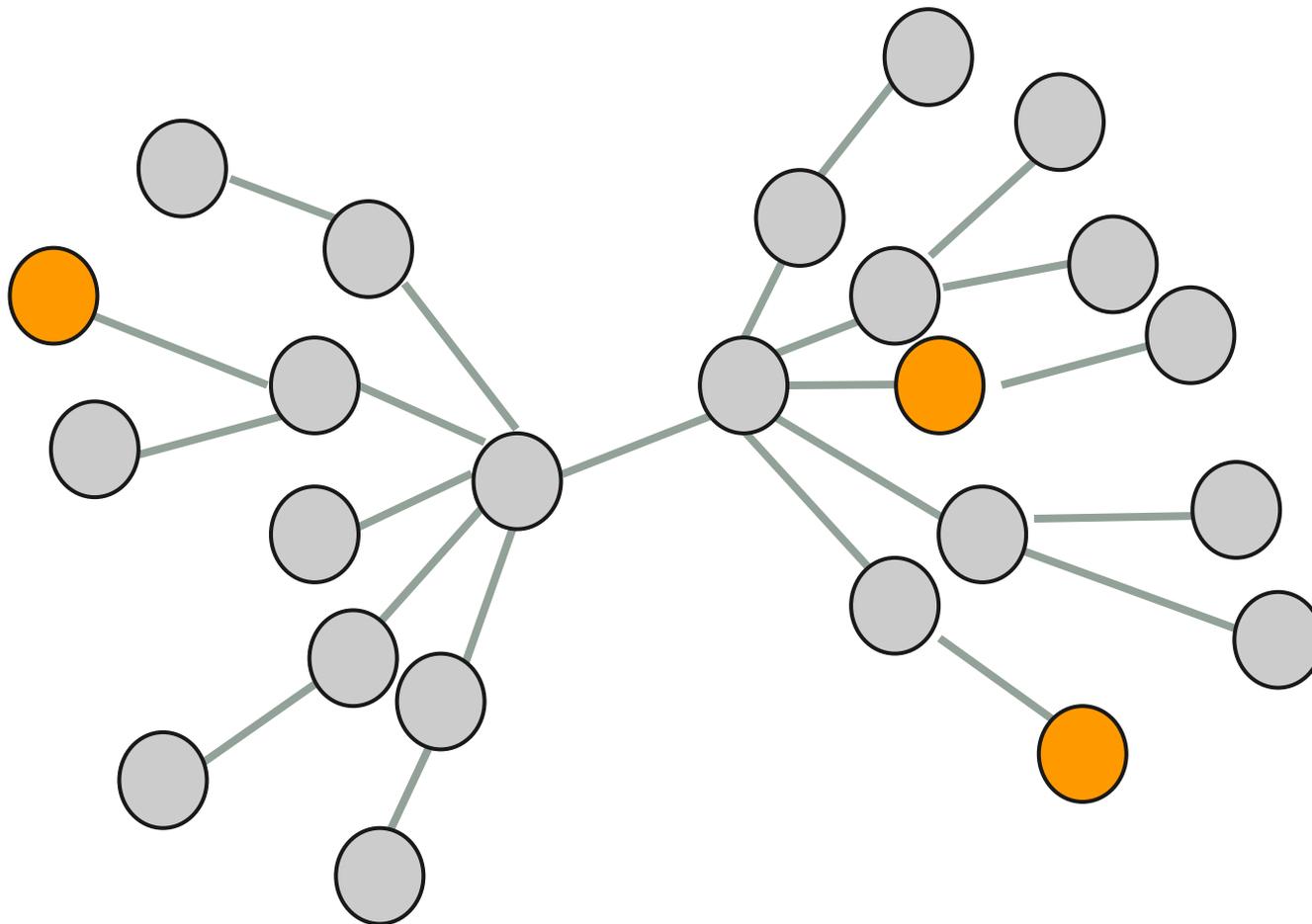
Invariância em Rede

Redes com essa característica tem uma menor chance de se tornar desconectada quando sofre um ataque aleatório.

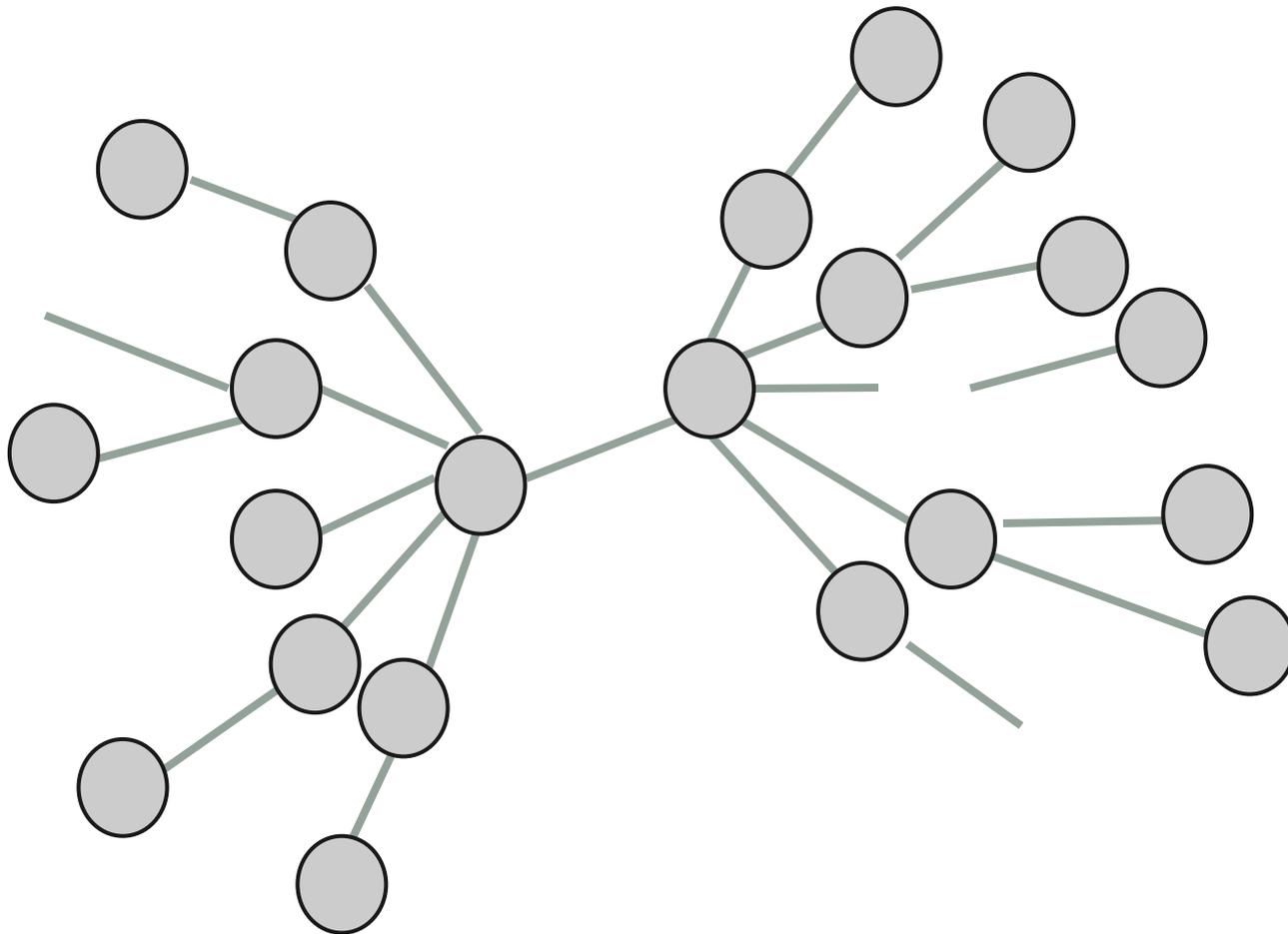
Exemplos de ataques em rede:

- ❑ Hackers atacando redes de internet
- ❑ Falha em um nó de uma malha de distribuição de energia
- ❑ Surgimento de um vírus

Invariância em Rede



Invariância em Rede

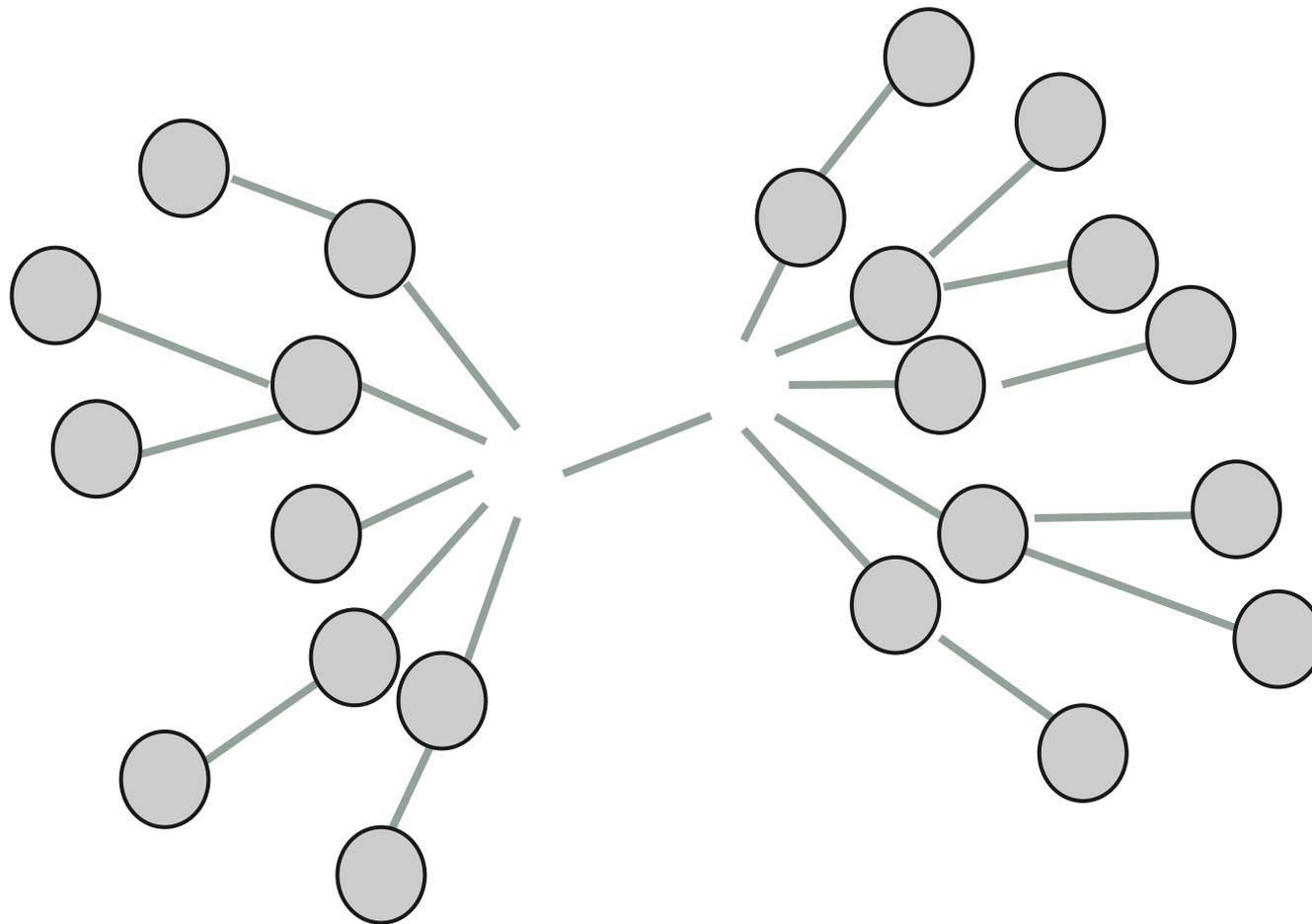


Invariância em Rede

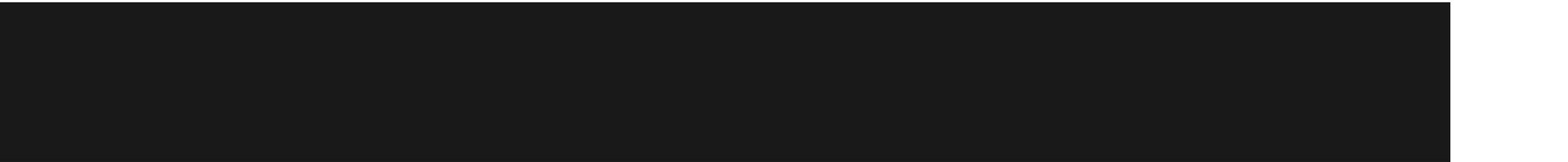
Porém, um ataque direcionado aos nós centrais pode facilmente desconectar a rede, dividindo a rede em vários **COMPONENTES CONEXOS**.

Em redes que tem uma capacidade de transmissão de informação especificada para cada nó e aresta, o ataque a um nó central pode sobrecarregar outros nós centrais, gerando uma desconexão em cascata.

Invariância em Rede



Cidades como Redes



Cidades como Seres Vivos

As cidades urbanas podem ser encaradas como um ser vivo.

Na verdade a vida de uma cidade é composta pela rede formada pelos seus habitantes.

Diversas características importantes emergem por conta disso.



Cidades como Seres Vivos

Supondo que o crescimento de uma cidade segue a lei de potência, assim como o metabolismo dos seres vivos, definimos:

$$Y(t) = Y_0 N(t)^\alpha$$

com $N(t)$ representando o número de habitantes no instante t e $Y(t)$ uma propriedade mensurável da cidade.



Cidades como Seres Vivos

Exemplos de propriedades mensuráveis:

- ❑ Energia consumida
- ❑ Riqueza
- ❑ Patentes
- ❑ Poluição
- ❑ Crimes
- ❑ Número de mercados
- ❑ etc.



Cidades como Seres Vivos

Table 1. Scaling exponents for urban indicators vs. city size

Y	β	95% CI	Adj- R^2	Observations	Country-year
New patents	1.27	[1.25,1.29]	0.72	331	U.S. 2001
Inventors	1.25	[1.22,1.27]	0.76	331	U.S. 2001
Private R&D employment	1.34	[1.29,1.39]	0.92	266	U.S. 2002
"Supercreative" employment	1.15	[1.11,1.18]	0.89	287	U.S. 2003
R&D establishments	1.19	[1.14,1.22]	0.77	287	U.S. 1997
R&D employment	1.26	[1.18,1.43]	0.93	295	China 2002
Total wages	1.12	[1.09,1.13]	0.96	361	U.S. 2002
Total bank deposits	1.08	[1.03,1.11]	0.91	267	U.S. 1996
GDP	1.15	[1.06,1.23]	0.96	295	China 2002
GDP	1.26	[1.09,1.46]	0.64	196	EU 1999–2003
GDP	1.13	[1.03,1.23]	0.94	37	Germany 2003
Total electrical consumption	1.07	[1.03,1.11]	0.88	392	Germany 2002
New AIDS cases	1.23	[1.18,1.29]	0.76	93	U.S. 2002–2003
Serious crimes	1.16	[1.11, 1.18]	0.89	287	U.S. 2003



Cidades como Seres Vivos

Table 1. Scaling exponents for urban indicators vs. city size

Y	β	95% CI	Adj- R^2	Observations	Country-year
Serious crimes	1.16	[1.11, 1.18]	0.89	287	U.S. 2003
Total housing	1.00	[0.99, 1.01]	0.99	316	U.S. 1990
Total employment	1.01	[0.99, 1.02]	0.98	331	U.S. 2001
Household electrical consumption	1.00	[0.94, 1.06]	0.88	377	Germany 2002
Household electrical consumption	1.05	[0.89, 1.22]	0.91	295	China 2002
Household water consumption	1.01	[0.89, 1.11]	0.96	295	China 2002
Gasoline stations	0.77	[0.74, 0.81]	0.93	318	U.S. 2001
Gasoline sales	0.79	[0.73, 0.80]	0.94	318	U.S. 2001
Length of electrical cables	0.87	[0.82, 0.92]	0.75	380	Germany 2002
Road surface	0.83	[0.74, 0.92]	0.87	29	Germany 2002

Data sources are shown in [SI Text](#). CI, confidence interval; Adj- R^2 , adjusted R^2 ; GDP, gross domestic product.



Cidades como Seres Vivos

A escala em lei de potência das cidades, difere do padrão encontrado nos seres vivos em que os expoentes eram múltiplos de $1/4$.

Veremos mais adiante que esse expoente tem relação com a dimensão do sistema.



Padrões de expoente

Apesar disso, o expoente nas cidades podem apresentar três características distintas:

- ❑ $\alpha = 1$: comportamento linear, a quantidade mensurada cresce igual ao número de novos habitantes.
- ❑ $\alpha < 1$: comportamento sublinear, a quantidade mensurada cresce em uma taxa menor do que a população.
- ❑ $\alpha > 1$: comportamento superlinear, a quantidade mensurada cresce em uma taxa maior do que a população.



Padrões de expoente

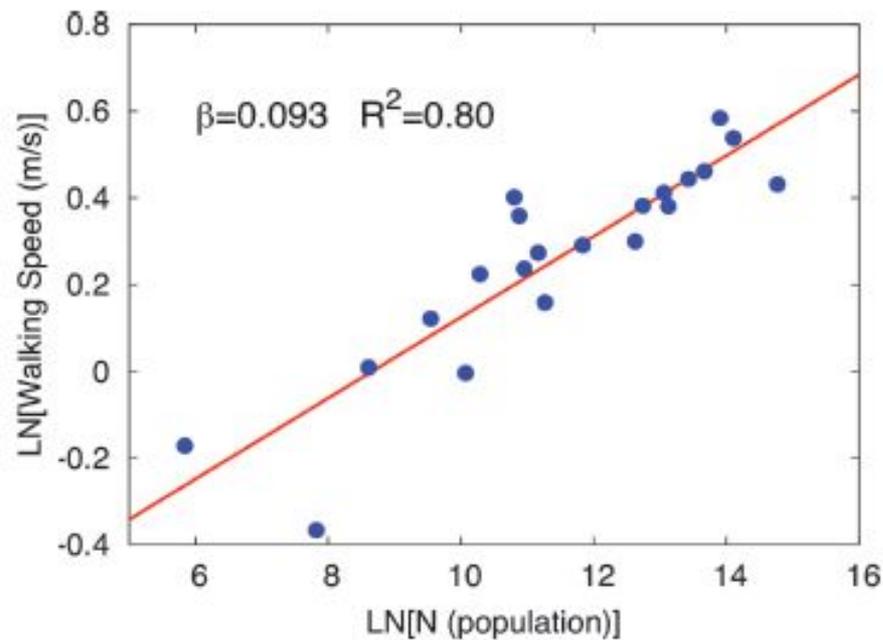
Apesar disso, o expoente nas cidades podem apresentar três características distintas:

- ❑ $\alpha = 1$: associado com necessidades individuais (emprego, casa, consumo de água).
- ❑ $\alpha < 1$: quantidades materiais e infraestrutura (postos de combustível, extensão de cabos elétricos).
- ❑ $\alpha > 1$: contrapartidas sociais (informação, crime, saúde).



Padrões de expoente

O fato das contrapartidas sociais apresentarem um fator de escala superlinear, indica que, ao contrário dos sistemas biológicos, a vida urbana apresenta uma maior velocidade quanto mais ela cresce e se desenvolve.



Equações do Crescimento

Denotamos Y como a quantidade do recurso mensurável que estamos estudando.

Se R é a quantidade de recurso por unidade de tempo para manter um indivíduo na população e E a quantidade necessária para adicionar um indivíduo.

Também definimos N como a quantidade de indivíduos na população e dN/dt a taxa de crescimento dela.



Equações do Crescimento

Temos então que:

$$Y = R \cdot N + E \cdot \frac{dN}{dt}$$

como consequência a taxa de crescimento é:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{Y}{E} - \frac{R}{E} N(t).$$



Equações do Crescimento

Lembrando que:

$$Y = Y_0 N(t)^\alpha$$

temos que:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{Y_0}{E} N(t)^\alpha - \frac{R}{E} N(t)$$



Equações do Crescimento

A solução dessa eq. diferencial é:

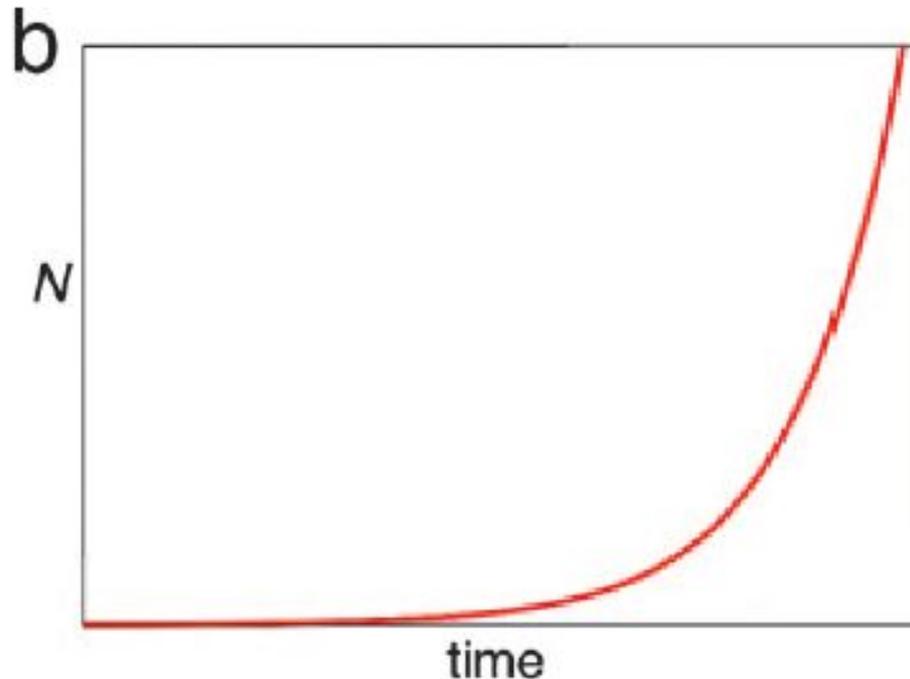
$$N(t) = \left[\frac{Y_0}{R} + \left(N^{1-\alpha}(0) - \frac{Y_0}{R} \exp \left[-\frac{R}{E} (1 - \alpha)t \right] \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$



Equações do Crescimento

Quando $\alpha \rightarrow 1$:

$$N(t) = N(0)\exp[(Y_0 - R)t/E]$$

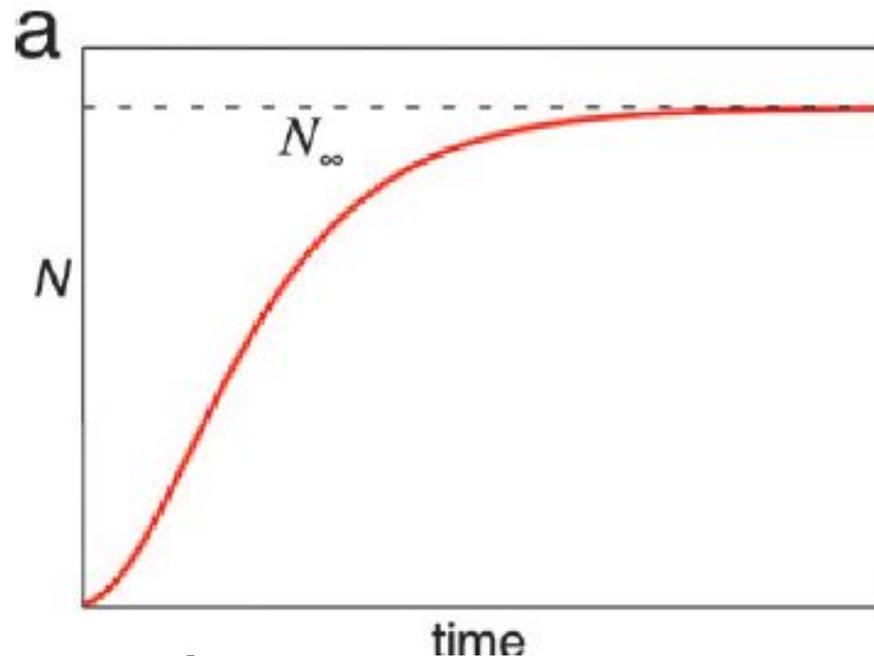


Crescimento exponencial da população.



Equações do Crescimento

Quando $\alpha < 1$:

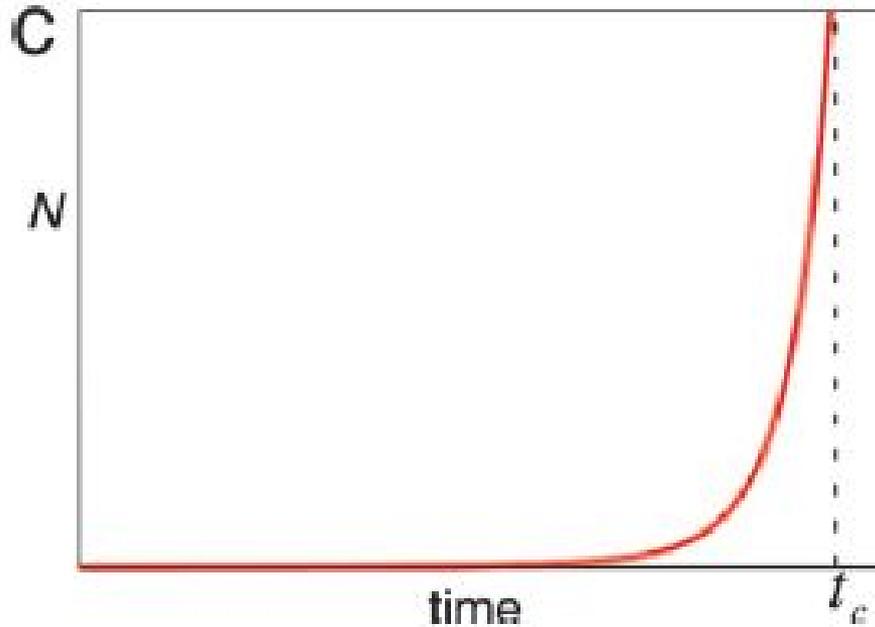


Crescimento logístico: em certo momento ocorre estagnação de acordo com os recursos limitados.



Equações do Crescimento

Quando $\alpha > 1$:

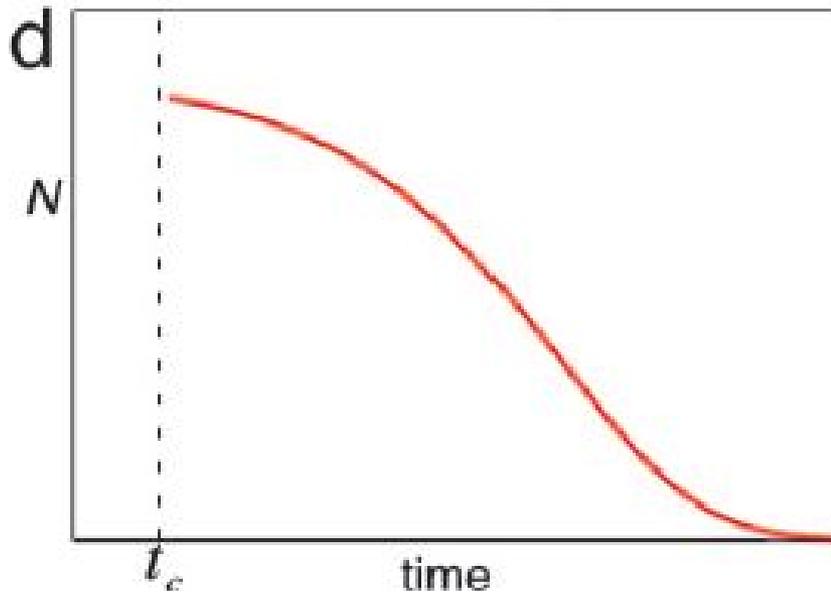


Crescimento explosivo: guiado pela inovação e riqueza. População infinita em tempo t_c finito.



Equações do Crescimento

Mas como recurso não pode ser infinito:

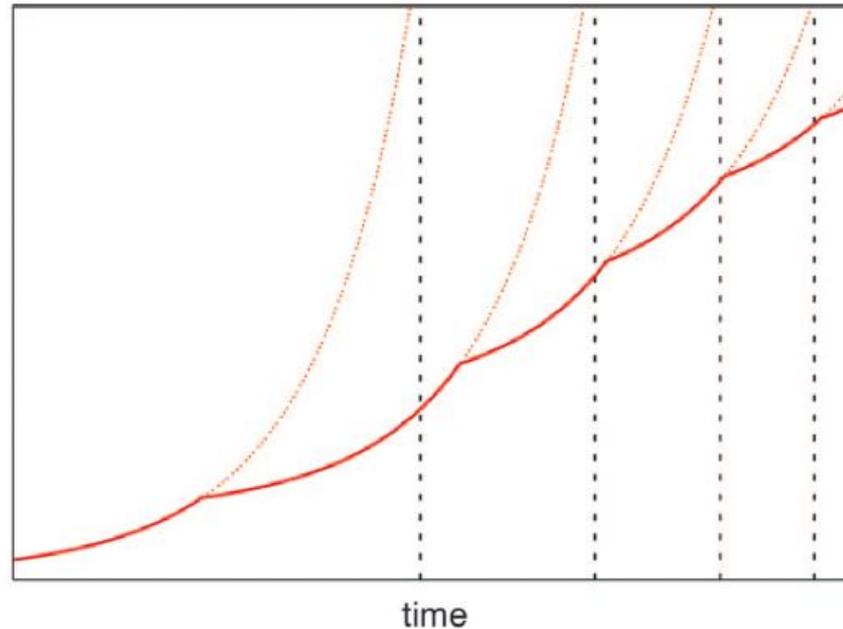


Colapso: após t_c , a rede entra em crise e colapso.



Equações do Crescimento

Na prática, em épocas de crise, temos inovação de uso e criação de recursos que dá novo “fôlego” para o crescimento



Mas o tempo entre crises se torna cada vez menor.



Escala e auto-organização

Expoente	Objetivo	Organização	Crescimento
$\alpha < 1$	Otimização e eficiência	Sustentável	Sigmoidal
$\alpha > 1$	Riqueza, recursos, informação	Agregadora	Explosão/Colapso
$\alpha = 1$	Manutenção Individual	Individual	Exponencial





Universidade Federal do ABC

Parte 5: determinando a lei de potência

Detectando Lei de Potência

Vamos supor 1 milhão de pontos gerados por uma distribuição de lei de potência com $\alpha = 2.5$.

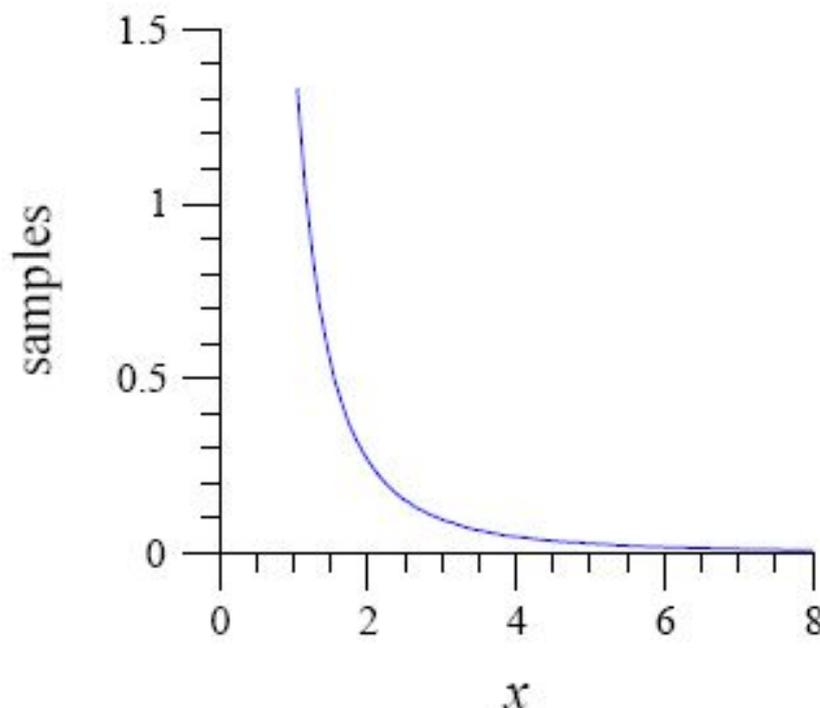
Se fizermos um histograma onde cada faixa tem tamanho igual a 0,1, teremos que:

- ❑ a primeira faixa vai de 1 a 1,1;
- ❑ a segunda faixa vai de 1,1 a 1,2;
- ❑ e assim por diante.



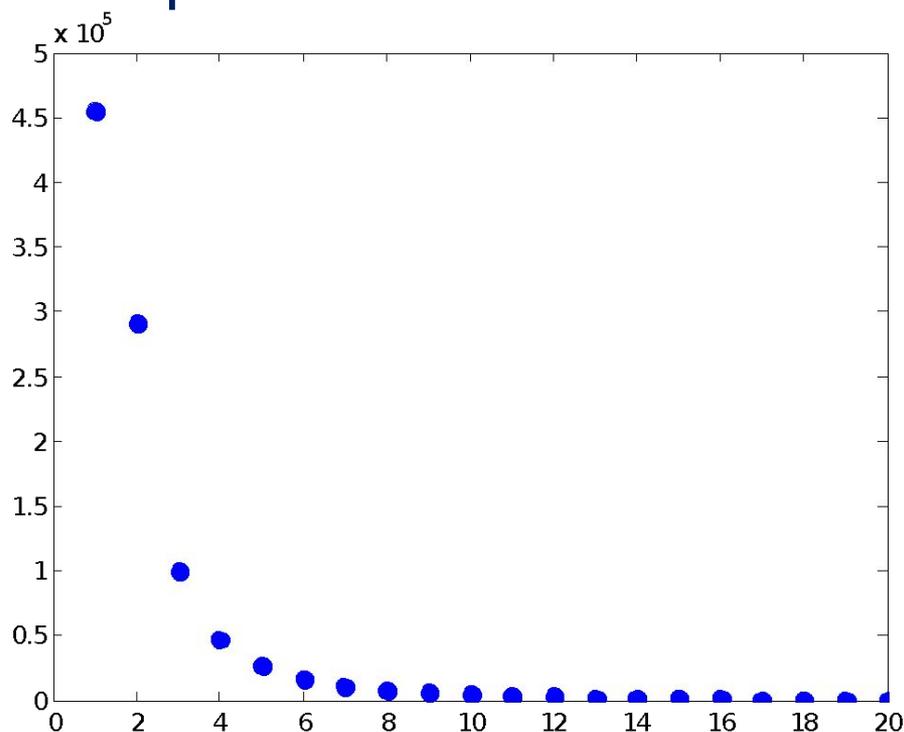
Detectando Lei de Potência

Em escala linear, e em condições ideais, teríamos a seguinte curva:



Detectando Lei de Potência

Mas, como a frequência de amostras tende a ser maior para as primeiras faixas e quase nula para as últimas faixas, pode não ser possível capturar a cauda longa adequadamente.



Detectando Lei de Potência

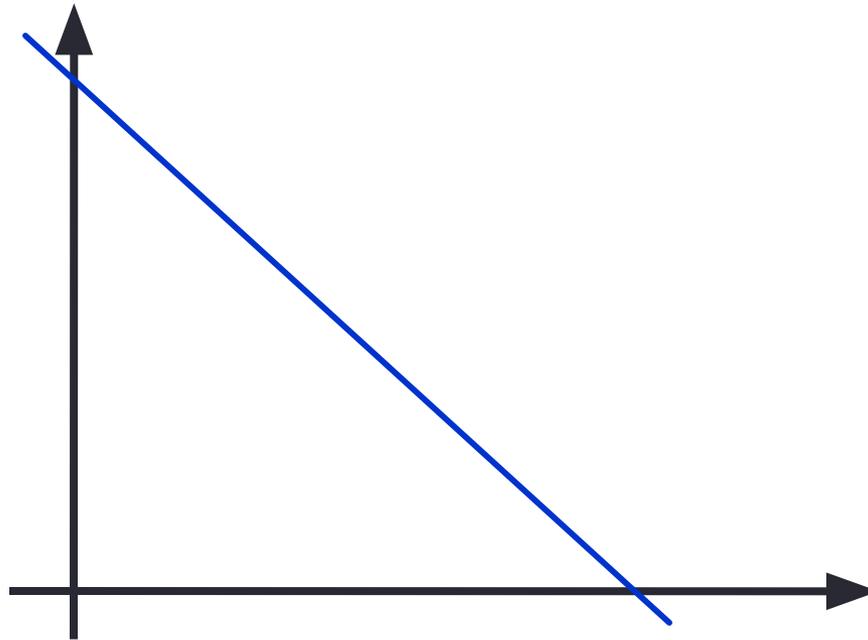
Temos 3 formas para solucionar esse problema e detectar se uma rede segue a lei de potência:

- ❑ Plotar o gráfico em escala logarítmica
- ❑ Utilizar faixas de valores logarítmicas no histograma
- ❑ Usar uma função de distribuição cumulativa



Gráfico em Escala Logarítmica

Criar um histograma de frequência com escala logarítmica:



Exemplo

Contagem da frequência dos graus dos nós:

grau=1, f=13

grau=2, f=6

grau=3, f=3

grau=4, f=0

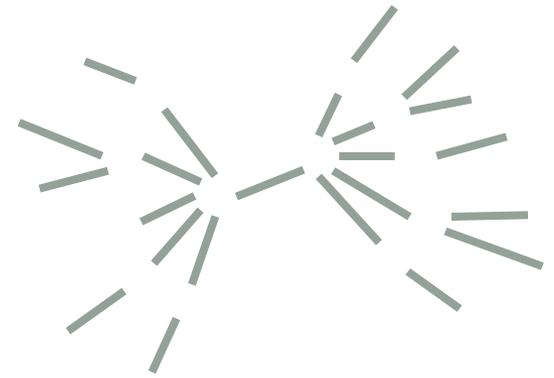
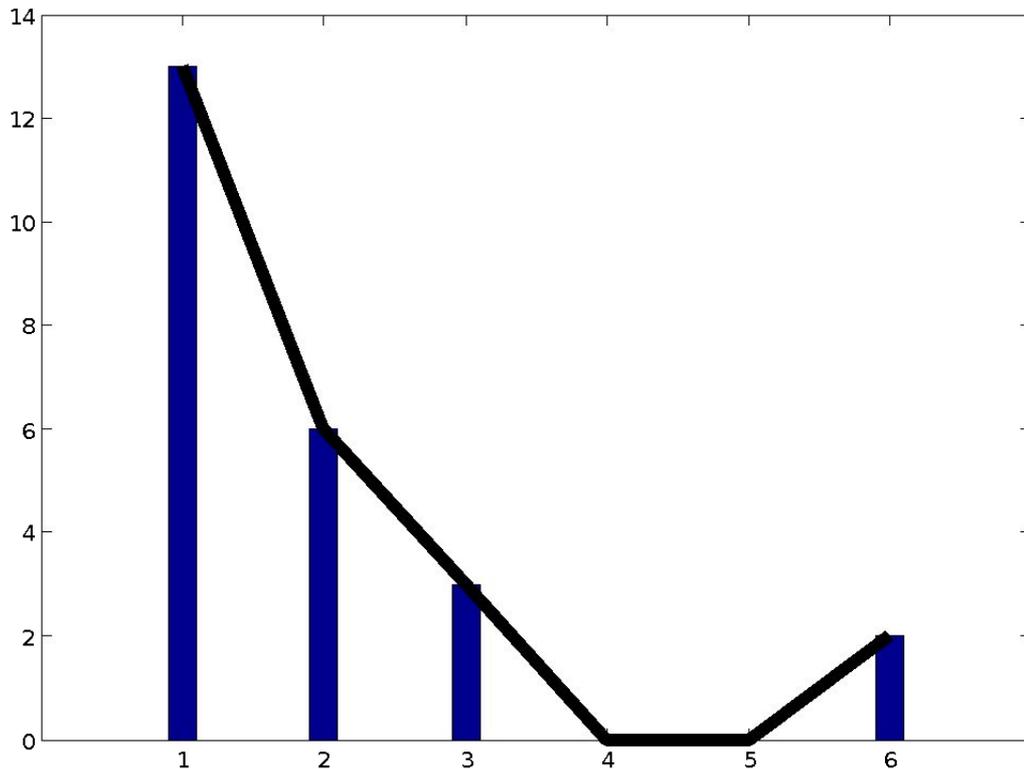
grau=5, f=0

grau=6, f=2



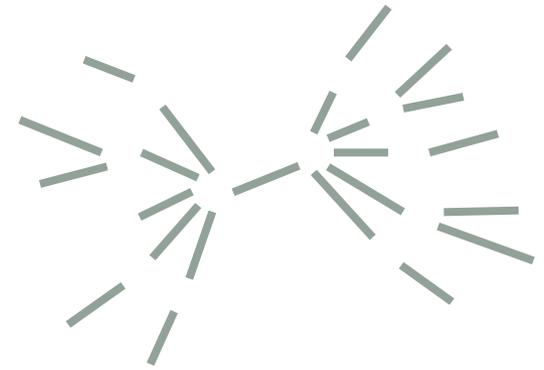
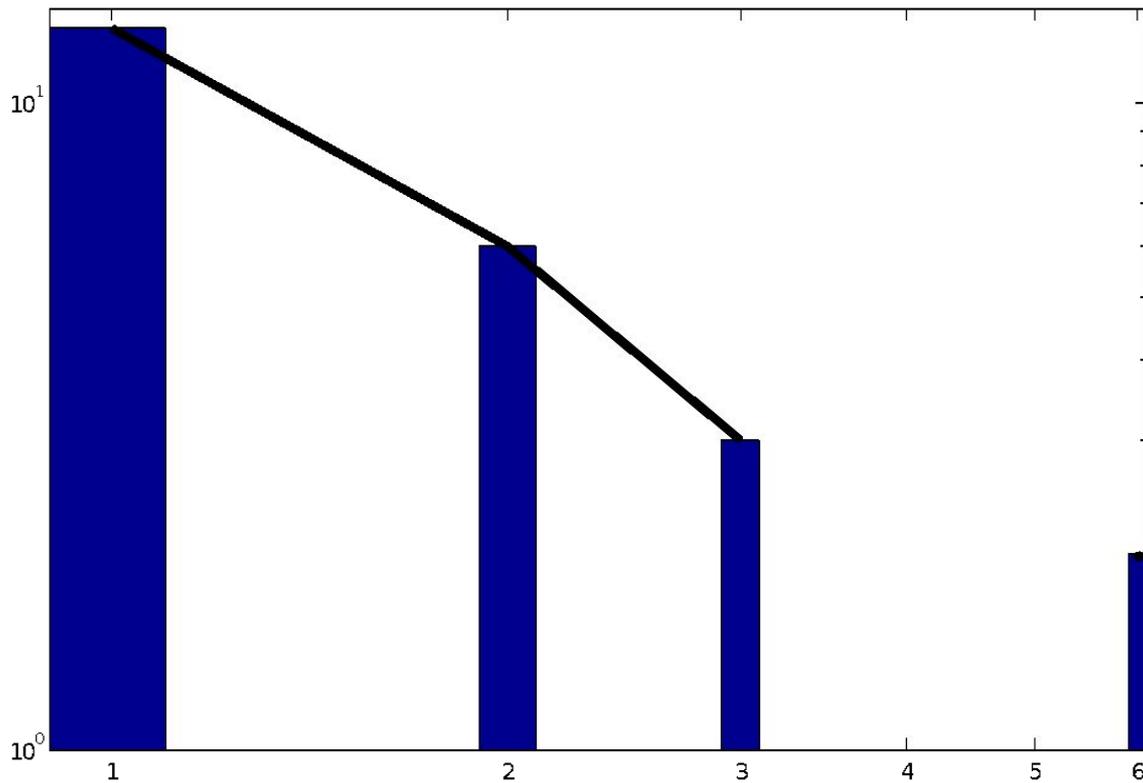
Exemplo

Histograma linear dos nós:



Exemplo

Histograma dos nós em escala logarítmica:



Parâmetros da Lei de Potência

Devemos lembrar que a função de lei de potência é:

$$f(x) = x_0 \cdot x^\alpha$$

Sabendo diversos valores mensurados de x e $f(x)$, queremos descobrir o valor de α e x_0 para extrapolarmos a função para qualquer valor de x .



Parâmetros da Lei de Potência

Calculando o logaritmo dessa função temos:

$$\log f(x) = \log x_0 + \alpha \cdot \log x$$

Com isso podemos estimar os valores de $\log(x_0)$ e α utilizando o método conhecido de regressão linear.

